Teichmüller 空间上的坐标与度量

杜晓明
华南理工大学数学学院

scxmdu@scut.edu.cn

2021-1-5

回顾 Teichmüller 空间的定义

对于亏格 $g \geq 2$ 的拓扑定向闭曲面 S_g，Teich(S_g) 的两种等价定义

1. Fricke 的定义：离散、单的同态 $\rho : \pi_1(S_g) \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ 的在 $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$ 作用之下共轭类组成的集合
2. Teichmüller 的定义：带标记双曲结构 (X, ϕ) 的同伦类组成的集合

问题：如何定义 Teich(S) 上的拓扑、坐标、以及度量？

拓扑的本质在于说明两个点什么时候“离得比较近”。在第一种定义中，由于可以方便地定义 $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ 上两个矩阵什么时候“离得比较近”，由此可以自然地出定义两个离散单同态的共轭类什么时候“离得比较近”。

Teich(S_g) 上用代数方式给出的拓扑

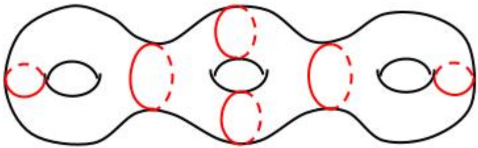
记 $\mathrm{DF}(\pi_1(S_g), \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}))$ 为 $\pi_1(S_g) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ 的全体离散单同态。

- 对 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ 赋予它作为一个 Lie 群的常用拓扑。
- $\pi_1(S_g)$ 的群表现可以取成 $2g$ 个生成元加 1 条关系。
- 一个同态 $\rho : \pi_1(S_g) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ 被各生成元被送到 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ 中的像所决定，因此存在从 $\mathrm{Hom}(\pi_1(S_g), \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}))$ 到 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})^{2g}$ 的自然放入。
- $\mathrm{DF}(\pi_1(S_g), \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}))$ 作为 $\mathrm{Hom}(\pi_1(S_g), \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}))$ 的开子集继承以上放入的子空间拓扑。
- 对商 $\mathrm{DF}(\pi_1(S_g), \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}))/\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$ 赋予商拓扑。

以上方式得到的 Teich(S_g) 上的拓扑称为 Teich(S_g) 上的**代数的拓扑**。

拓扑曲面的裤子分解

记 P 为亏格为 0、带 3 个边界连通分支的紧曲面，这样的 P 称为**裤子**（**pants**）。S_g 的一个**裤子分解**（**pants decompostion**）指的是：在 S_g 上选取 $3g-3$ 条互不相交的简单闭曲线 $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_{3g-3}\}$，使得 S_g 沿着这些曲线割开之后是 $2g-2$ 条裤子。

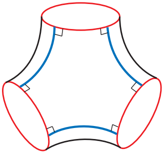
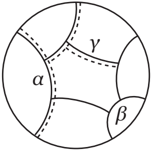


当 S_g 上有双曲结构时，这 $3g-3$ 条曲线有彼此不相交的简单闭测地线代表元。$2g-2$ 条裤子继承 S_g 上的双曲结构之后，成为带测地边界的双曲裤子。这些裤子上的双曲结构能反映 S_g 上双曲结构的信息。

定理

一条裤子上带测地边界的双曲结构被边界上的长度唯一决定。

- 取两两连接三个边界的三条测地线段，由变分原理可知这些测地线段必然垂直于裤子的边界测地线。裤子沿这些测地线段割开得到两个双曲直角六边形。
- 双曲直角六边形的形状，被它的特定三条边的长度唯一决定；这三条边的选取方式是：在六条边上隔一条地取。

Teich(S_g) 的 Fenchel-Nielsen 坐标

设 $g \geq 2$，取定 S_g 的一个裤子分解。要刻画 S_g 上被基本群记录的双曲结构，需要以下因素：

1. $\{\gamma_i \mid i = 1, \cdots, 3g-3\}$ 对应的简单闭测地线长度。
2. 在每裤子上作两两连接三个边界的测地线段，它们在三个测地边界上有对应的垂足。S_g 上的双曲结构还依赖于每条 γ_i 两边双曲裤子上的垂足之间的错位距离。

定理

以上 $6g-6$ 个参数唯一地决定了 $Teich(S_g)$ 中的点。特别地，有 $Teich(S_g) \cong \mathbb{R}^{6g-6}$。这些参数称为 $Teich(S_g)$ 的 *Fenchel-Nielsen* 坐标。

假设 $\rho_1, \rho_2 : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ 代表两个被曲面基本群元素记录的双曲结构，希望用 $\mathscr{X}_1 = \mathbb{H}^2/\rho_1(\pi_1(S))$ 与 $\mathscr{X}_2 = \mathbb{H}^2/\rho_2(\pi_1(S))$ 之间的形变量（准确来说是伸缩商）作为这两个结构之间距离的定义。步骤：

1. 利用记录双曲结构的基本群标记，构造一个拓扑上的同胚 $f : \mathscr{X}_1 \to \mathscr{X}_2$，使得 f 在基本群上诱导的是恒同同构。
2. 利用 $\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2$ 这两个附加在拓扑结构之上的双曲结构，计算拓扑上的映射 f 在这两个双曲结构下的最大伸缩商。
3. 让 f 同伦地形变，计算同伦类中最大伸缩商的下确界，利用该下确界定义出 $\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2$ 这两个双曲结构之间的距离。

伸缩商的计算

定义 (带度量的曲面之间的光滑映射在一点处的伸缩商)

设 X、Y 是带度量的曲面，$h : X \to Y$ 是光滑同胚。对 $p \in X$，$S_p(r) = \{q \in X : d_X(p,q) = r\}$，定义局部伸缩商

$$K_p(h) = \lim_{r \to 0+} \frac{\sup\{d_Y(h(p),h(q)) : q \in S_p(r)\}}{\inf\{d_Y(h(p),h(q)) : q \in S_p(r)\}}$$

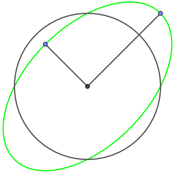
注：$K_p(h)$ 反映的是 h 在 p 处距离一个共形变换有多远。

定义 (带度量的曲面之间的光滑映射的最大伸缩商)

设 X、Y 是带度量的曲面，$h : X \to Y$ 如前。定义

$$K(h) = \sup\{K_p(h) : p \in X\}$$

伸缩商的几何解释是把局部无穷小圆变成无穷小椭圆时的长短轴之比。尽管它的定义要用到度量结构，但是实际上它只依赖于角度的变化，因此只需要 X 与 Y 背后的共形结构即可定义出伸缩商。在理论证明中，用共形结构（以复数为工具）表达的伸缩商更有效。



$$f:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}a(x,y)\\b(x,y)\end{pmatrix},\quad df:\begin{pmatrix}dx\\dy\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}a_x & a_y\\b_x & b_y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dx\\dy\end{pmatrix}$$

设 Jacobi 矩阵的两个的特征为 $\lambda_1,\lambda_2(|\lambda_1|>|\lambda_2|)$，$\lambda_1/\lambda_2=K$，则有 $\lambda_1+\lambda_2=a_x+b_y,\lambda_1\lambda_2=a_xb_y-a_yb_x$。

$K+\dfrac{1}{K}=\dfrac{\lambda_1^2+\lambda_2^2}{\lambda_1\lambda_2}$ 可以得到用 a_x,a_y,b_x,b_y 表示 K 的表达式。

再令 $\mu_f=\dfrac{f_{\bar z}}{f_z}=\dfrac{\frac{1}{2}(\partial_x+i\partial_y)(a+ib)}{\frac{1}{2}(\partial_x-i\partial_y)(a+ib)}=\dfrac{(a_x-b_y)+i(b_x+a_y)}{(a_x+b_y)+i(b_x-a_y)}$ 可得 $K=\dfrac{1+|\mu_f|}{1-|\mu_f|}$

Teichmüller 度量

定义 (两个被曲面基本群记录的双曲结构之间的距离)

设 S 是拓扑曲面，$\mathscr{X}_1$、$\mathscr{X}_2$ 是 S 上两个被基本群元素记录的双曲度量结构，$h : \mathscr{X}_1 \to \mathscr{X}_2$ 在拓扑上诱导了曲面基本群上的恒同映射。对另一个 $f : \mathscr{X}_1 \to \mathscr{X}_2$，$K(f)$ 为映射 f 的最大伸缩商。定义

$$d_{Teich}(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2) = \frac{1}{2} \inf \left\{ \log K(f) \,\middle|\, f \text{ 同伦于 } h \right\}$$

为这两个被基本群元素记录的双曲度量结构之间的距离。*Teichmüller* 空间上的这个度量称为 **Teichmüller 度量**。

注：$\mathscr{X}_1$、$\mathscr{X}_2$ 相同时显然它们之间距离为零。

细节上的问题

- 局部伸缩商的定义要依赖于映射的可微性，但是同伦类中的映射不一定可微，如何解决该问题？（拟共形映射）
- 在同伦类中让映射的最大伸缩商达到下确界时，该下确界能否被具体的同胚实现？（Teichmüller 定理）
- 若刚好能够实现，该同胚长成什么样子？（Teichmüller 映射、带横截测度的叶状结构、全纯二次微分）
- 这样定义出来的两个双曲结构之间的距离，是否满足三角不等式、对称性等条件？

拟共形映射

问题：局部伸缩商的定义要依赖于同胚的可微性，但是同伦类中的映射不一定可微，需要计算的确界在可微同胚的同伦类中也不一定能够取到，如何解决这些问题？

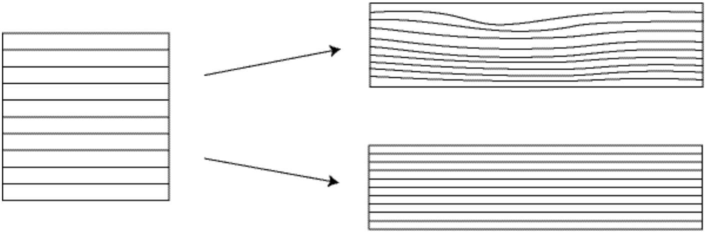
解决办法：Ahlfors 扩大了同伦的可微同胚所在的集合：

$$\{\text{可微同胚}\} \to \{\text{拟共形同胚}\}$$

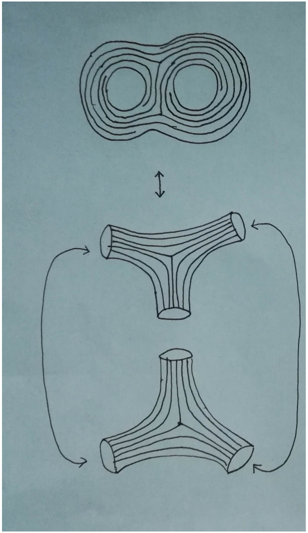
手段是取在伸缩商的 L^∞ 范数之下的完备化。完备化前的集合不是列紧的，完备化后的集合是列紧的。在拟共形同胚上定义出广义的伸缩商之后，就能够取到最大伸缩商的下确界。Ahlfors 证明了实现这个下确界的同胚除了有限个点不可微之外其他点都可微。

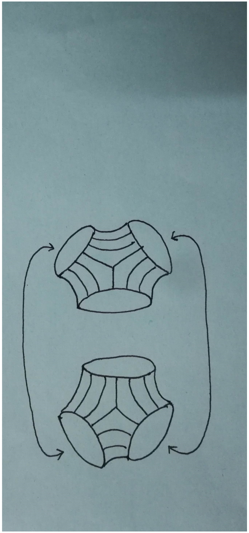
（以上方法有点像解 PDE 时先在更大广义函数空间中求弱解）。

实现最大伸缩商最小化的同胚



实现最大伸缩商最小化的同胚：闭曲面情形的例子





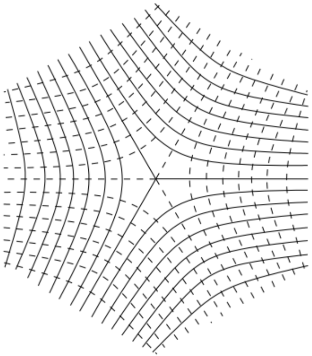
全纯一次微分 v.s. 全纯二次微分 v.s. 叶状结构

$$\left\{\begin{array}{c}\text{全纯一次微分}\\ \omega = f(z)dz\end{array}\right\} \text{“}\leftrightarrow\text{”} \left\{\begin{array}{c}\text{满足“某些条件”的映射：}\\ \{\text{曲面上的带方向道路}\} \to \mathbb{C},\\ \gamma \mapsto \omega(\gamma) = \int_0^1 f[\gamma(t)]\gamma'(t)dt\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{全纯二次微分}\\ q = f(z)dz \otimes dz\end{array}\right\} \text{“}\leftrightarrow\text{”} \left\{\begin{array}{c}\text{满足“某些条件”的映射：}\\ \{\text{曲面上的不带方向道路}\} \to \mathbb{C},\\ \gamma \mapsto q(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{f(\gamma(t))(\gamma'(t))^2}dt\end{array}\right\}$$

- 叶状结构 $\mathcal{F}^u$：过点 p_1 的叶片 $= \{$ 点 $p_2 \mid$ 存在道路 γ 连接 p_1, p_2 且 $q(\gamma)$ 虚部为 0 $\}$；$\mathcal{F}^u$ 的奇异点（或分支点）= 全纯二次微分的零点；γ 在 $\mathcal{F}^u$ 下的横截测度 $= q(\gamma)$ 的虚部的绝对值。
- 与 $\mathcal{F}^u$ 正交的另一个叶状结构 $\mathcal{F}^s$：把上面的虚部换成实部。
- 共形结构沿这两个叶状结构的形变：$\mathcal{F}^u$ 方向拉伸+$\mathcal{F}^s$ 方向收缩。

例：$q = z\,\mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}z$ 对应的叶状结构



沿着 $\gamma(t) = e^{\alpha i} t$ 使 $\int_0^1 \sqrt{f(\gamma(t))(\gamma'(t))^2}dt$ 虚部为零 $\Rightarrow \alpha = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$。

沿着 $\gamma(t) = e^{\alpha i} t$ 使 $\int_0^1 \sqrt{f(\gamma(t))(\gamma'(t))^2}dt$ 实部为零 $\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$。

二次微分与 2-形式、一次微分的差别体现在哪里？

二次微分在一点处是直接作张量积 $\mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}z$，2-形式在一点处是张量积的反对称线性组合 $\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z} = \frac{1}{2}(\mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}\bar{z} - \mathrm{d}\bar{z} \otimes \mathrm{d}z)$。

全纯一次微分 ω 在道路每一点处的切向量上的作用是：
$\langle \omega, (\gamma(t), \gamma'(t)) \rangle = \langle f(z)\mathrm{d}z, (\gamma(t), \gamma'(t)) \rangle = f(\gamma(t))\gamma'(t)$，
ω 在整条道路上的作用即对每一点处的作用求积分，全纯性保证作用量在道路的定端同伦之下不变。

全纯二次微分 q 在道路每一点处的切向量上的作用是：
$\langle q, (\gamma(t), \gamma'(t)) \rangle = \langle f(z)\mathrm{d}z \otimes \mathrm{d}z, (\gamma(t), \gamma'(t)) \rangle = f(\gamma(t))(\gamma'(t))^2$，
q 在整条道路上的作用即对每一点处的作用求积分。但为了使积分值在不经过奇点的道路定端同伦之下不变，需要开根再作积分。开根可能会导致不是良定义，结果相差一个正负号。但是横截测度的定义是取绝对值，不受影响。

为什么用一次微分不行、需要用二次微分？

最终目标是为了让共形结构形变。类似于让度量结构形变。

- 度量结构满足对称性。对于连接两点 p_1, p_2 的测地线段 γ，计算长度时不需要事先对 γ 取定方向。即不管 γ 是从 p_1 到 p_2 还是反过来从 p_2 到 p_1，度量结构给出作用量都相同。
- 一次微分作用在道路 γ 上的值依赖于 γ 的方向的选取，当 γ 取反方向时，作用量会相差一个负号。
- 二次微分作用在道路 γ 上的值不依赖于 γ 的方向的选取，求作用量时乘的 $(\gamma'(t))^2$ 会抵消掉负号带来的影响。因此度量在共形结构下的类比物应该是二次微分。

设 S_g 为亏格为 g 的定向闭曲面。对于拓扑曲面 S_g 上的两个被基本群记录的双曲结构 $\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2$，存在唯一的映射 $f: \mathscr{X}_1 \to \mathscr{X}_2$，使得：

(1) 从拓扑结构的角度，f 在 $\pi_1(S_g)$ 上诱导的同态是恒同同态。

(2) 考虑双曲结构之后，f 只在有限个点上不可微，在可微点处的最大伸缩商取到同伦类中的下确界，并且处处伸缩商相等。

(3) 在 $\mathscr{X}_1$ 上存在两族相互正交的叶状结构 $\mathcal{F}_1^s, \mathcal{F}_1^u$（正交意味着有相同的奇点），在 $\mathscr{X}_2$ 上也存在两族相互正交的叶状结构 $\mathcal{F}_2^s, \mathcal{F}_2^u$。

(4) f 把 $\mathcal{F}_1^s$ 的奇点映成 $\mathcal{F}_2^s$ 的奇点，把 $\mathcal{F}_1^s$ 的叶片映成 $\mathcal{F}_2^s$ 的叶片，把 $\mathcal{F}_1^u$ 的叶片映成 $\mathcal{F}_2^u$ 的叶片。

(5) 在不包含奇点的局部邻域中，在 $\mathcal{F}_1^u, \mathcal{F}_1^s, \mathcal{F}_2^u, \mathcal{F}_2^s$ 的横截测度给出的坐标下，f 可以表示成 $(x, y) \mapsto (\sqrt{K}x, \frac{1}{\sqrt{K}}y)$，$K$ 为伸缩商。

以上映射称为 $\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2$ 之间的 **Teichmüller 映射**。

Teichmüller 度量下的测地射线

设 S_g 为亏格为 g 的定向闭曲面，$\mathscr{X}$ 是 S_g 上被基本群记录的双曲结构，$\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u$ 是 $\mathscr{X}$ 上的两族相互正交的叶状结构。对 $t \in [0, +\infty)$，令 $K_t = e^t$，对 $\mathscr{X}$ 沿着 $\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u$ 按以下方式作形变：

在 $\mathcal{F}^u, \mathcal{F}^s$ 的横截测度给出的坐标下，令 $(x, y) \mapsto (\sqrt{K_t}x, \frac{1}{\sqrt{K_t}}y)$，新坐标能给出新的复结构。带这样的被基本群记录复结构的曲面记为 $\mathscr{X}_t$。

定义 $\{\mathscr{X}_t : t \in [0, +\infty)\}$ 为 $\mathrm{Teich}(S_g)$ 里面、在 Teichmüller 度量之下、经过 $\mathscr{X}$、沿着 $\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u$ 这两组相互正交的叶状结构决定的方向发出的测地射线。