辨认曲面形状的工具：Teichmüller 空间

杜晓明
华南理工大学数学学院

scxmdu@scut.edu.cn

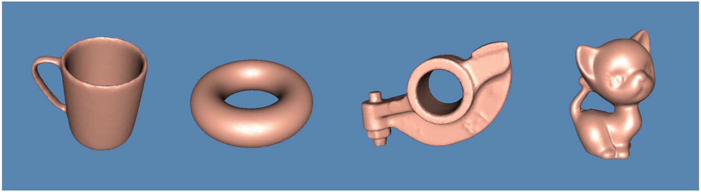
2021-1-4

本系列课程的计划

四次课：

1. Teichmüller 空间的引入
2. Teichmüller 空间上的坐标与度量
3. 曲面映射类群在 Teichmüller 空间上的作用
4. 关于 Teichmüller 空间的前沿结果

基本的问题



问题 1：如何辨认一张曲面的“形状”？

问题 2：给定两张曲面，如何衡量它们“形状相差多远”？

问题 3：对于以上的概念，如何给出有效的记录与计算的方法？

首先需要的，是把何谓“曲面的形状”、“两个形状之间的差距”在数学上定义清楚。

回顾本科微分几何课程

定理（微分几何曲面理论的基本定理）

曲面 S 嵌入在三维欧氏空间 $\mathbb{E}^3$ 的形状信息，由第一基本形式与第二基本形式完全决定。

注 1：第一基本形式是定义在曲面各点上的三个函数 $E, F, G : S \to \mathbb{R}$，记录曲面上的度量信息（三个函数直接给出了有效的记录方法）。

注 2：第二基本形式是定义在曲面各点上的三个函数 $L, M, N : S \to \mathbb{R}$，记录曲面嵌入在三维空间时的法向量变化信息。

注 3：第一基本形式与第二基本形式不是独立的，它们之间要满足一组微分方程（Gauss-Codazzi 方程）。

“嵌入信息” v.s. “内蕴信息”

定理（Gauss 绝妙定理)

曲面各点处的总曲率被第一基本形式的三个函数 E, F, G 完全决定。

注 1：该定理的意义：曲面上的度量也能反映曲面的形状。

注 2：对于生活在曲面上的生物来说，只能从内部测量到曲面上的内蕴度量信息，无法感知到曲面到三维欧氏空间的嵌入信息。因此，对于记录曲面形状来说，曲面上的度量信息更加根本。

注 3：以度量来衡量形状的高维版本就是黎曼几何。

以上就是本科微分几何课程的大部分内容。

“一般度量结构” v.s. “黎曼度量结构”

一般度量结构：任意两点之间距离的指定。

$$\left\{\begin{array}{c}\text{曲面 } S \text{ 上的} \\ \text{一般度量结构}\end{array}\right\} \text{“}\leftrightarrow\text{”} \left\{\begin{array}{c}\text{满足“某些条件”的} \\ d : S \times S \to \mathbb{R}_{\geq 0}\end{array}\right\}$$

黎曼度量结构。微观的观点：曲面上的光滑、二阶、协变、对称、正定的张量场；宏观的观点：对可微道路长度的指定。

$$\left\{\begin{array}{c}\text{曲面 } S \text{ 上的} \\ \text{黎曼度量结构}\end{array}\right\} \text{“}\leftrightarrow\text{”} \left\{\begin{array}{c}\text{满足“某些条件”的} \\ \Phi : \{\text{曲面上的可微道路}\} \to \mathbb{R}_{\geq 0}\end{array}\right\}$$

本课程后面说到度量结构时，都特指黎曼度量结构。

“度量结构” v.s. “共形结构”

尽管黎曼度量在数学理论上很完美，但是处理实际问题的时候可能会遇到一些问题。

- 黎曼度量非常刚性，然而现实问题总会有误差。
- 用计算机表达黎曼度量时，数据结构不好处理。
- 黎曼度量包含的信息量太多，实际中有可能只需要其中一部分信息，就足以反映出曲面的形状。

其中一个解决办法：由余弦定理，光滑度量结构除了指定长度之外，还指定了无穷小三角形的角度；若曲面上任意两条相交曲线的相交角度可良定义，则对角度的指定是度量结构所包含信息的其中一部分。提取出这部分信息，成为共形结构（曲面版本的复结构）。

曲面上各个层次的几何结构

回顾曲面上的各种几何结构的定义，都是一族开集 $\{U_\alpha\}$，满足：

- $\{U_\alpha\}$ 覆盖了曲面；
- 对每个指标 α 均有连续的同胚 $\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^2/\mathbb{C}$；
- $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ 时 $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ 是平面子集之间的“某种”映射。

“某种”映射取成“连续/可微/保角/有理”映射时，这一族局部坐标 $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ 就对应着曲面上的“拓扑/微分/共形/代数簇”结构。

有了这些结构，才能谈什么是曲面上的“连续/可微/全纯/代数”函数。曲面本身只是一个集合，直接从集合到实数的映射信息量不大。有了局部坐标之后，从曲面到实数的映射也就有了坐标，就可以根据坐标来谈多元函数的性质。

曲面上各个层次的几何结构

曲面上常见的几何结构：

(1) 拓扑结构　(2) 微分结构　(3) 辛结构　(4) 共形结构
(5) 度量结构　(6) 双曲结构　(7) 代数簇结构

从定义上看，在强弱关系方面，有：

$(1) < (2) < (3) < (4) < (5) < (6)$, $(4) < (7)$

越强的几何结构，包含的信息越多，越具备刚性，但是满足条件的集合越小。越弱的几何结构，则适用范围越广。共形结构是连接各种结构的一个重要桥梁！利用共形结构甚至可以证明在一定条件下以上有些几何结构之间是等价的。

一些工具所在的层次

拓扑结构：连续，同伦，基本群，覆盖空间，同调，上同调（点集拓扑、代数拓扑课程）

微分结构：切向量场，微分形式，de Rham 上同调，纤维丛，示性类（微分流形课程）

共形结构：全纯函数，亚纯函数（复分析课程）

黎曼度量结构：调和映射，Hodge 分解，联络，活动标架，测地线，曲率，等温坐标（微分几何课程）

一般流形上各个层次的几何结构的关系

(1) 拓扑结构　(2) 微分结构　(3) 辛结构　(4) 复结构
(5) 度量结构　(6) 双曲结构　(7) 代数簇结构

(1) 与 (2) 之间：Milnor、Freedman、Donaldson（分别是 1964、1986、1986 年菲尔兹奖得主）的工作

(4) 与 (5) 之间：（实 2 维、复 1 维的情形下）Gauss-陈省身的等温坐标、Ricci 流

(4) 与 (6) 之间：（实 2 维、复 1 维的情形下）Möbius 变换，Klein-Poincaré-Koebe 单值化定理

(4) 与 (7) 之间：Weierstrass、周炜良、小平邦彦（1954 年菲尔兹奖得主）的工作

基本问题的提炼

问题 1：给定一张带黎曼度量的曲面，如何辨认出该黎曼度量背后的共形结构？

问题 2：给定两张带黎曼度量曲面，如何衡量它们的黎曼度量背后的共形结构之间相差有多远？

问题 3：给定两张带黎曼度量曲面，如何用方便计算机表达的数据结构来描述它们的黎曼度量背后的共形结构？

共形结构比起黎曼度量结构，好处是“忘掉”了各点之间在度量上的差异，在每一点的局部都是一样的。用严格的数学语言来说，是更加齐性了。

给拓扑曲面赋予齐性几何结构

设 X 是单连通、带齐性几何结构的空间，$Aut(X)$ 是由 X 上全体保持几何结构的自同构组成的群。对 $Aut(X)$ 的任意离散子群 Γ，X/Γ 也自动带有局部上与 X 相同的几何结构，并且 $\pi_1(X/\Gamma) \cong \Gamma$。

反过来，设 S 是拓扑曲面，X 是拓扑上同胚于 S 的万有覆盖、带齐性几何结构的空间，$Aut(X)$ 是由 X 上全体保持几何结构的自同构组成的群。若存在离散、单的群同态 $\rho : \pi_1(S) \to Aut(X)$，则利用 ρ 可以给 S 赋予局部上与 X 相同的几何结构 $X/\rho(\pi_1(S))$。

例：给定两个非零复数 z_1, z_2，满足对任意实数 t 都有 $z_2 \neq tz_1$，则 $\Lambda = \{m \cdot z_1 + n \cdot z_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ 是 $\mathbb{C}$ 的离散加法子群，保持 $\mathbb{C}$ 的复结构以及平坦结构，因此 $\mathbb{C}/\Lambda$ 给出环面上的复结构以及平坦结构。

例：X 是上半平面 $\mathbb{H}^2=\{z\in\mathbb{C}\mid Im(z)>0\}$，取上面的复结构，
X 上保持复结构的全体自同胚（即全体双全纯自同胚）为 $Aut(X)$
$=\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})\cong\left\{f(z)=\frac{az+b}{cz+d}\mid a,b,c,d\in\mathbb{R}, ad-bc=1\right\}/\{\pm 1\}$。

例：X 是上半平面 $\mathbb{H}^2$，取上面的齐性双曲度量为 $ds=\frac{|dz|}{|Im(z)|}$，
X 上保持该度量的全体自同胚 $Aut(X)$ 也是 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$。

由此得出在所有以 $\mathbb{H}^2$ 为万有覆盖的曲面上，共形结构与双曲结构是等价的。我们后面将在共形结构与双曲结构之间自由地切换。有些工具在共形结构的框架下讨论比较方便，有些工具则在双曲结构的框架下讨论比较方便。

Teichmüller 空间的第一种定义

设 S 是 Euler 特征为负的拓扑曲面，S 上的赋予双曲结构之后的曲面记为 X，则 X 可作为 $\pi_1(S)$ 等距作用在双曲平面上所得的商空间。

$$\left\{\begin{array}{c}\text{被曲面基本群元素}\\ \text{记录的双曲结构}\end{array}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{离散、单的同态}\\ \rho:\pi_1(S)\to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}))\end{array}\right\}/\sim$$

$$\mathscr{X} \leftrightarrow \mathbb{H}^2/\rho(\pi_1(S))$$

$$\rho_1\sim\rho_2 \Leftrightarrow \exists\, A\in \mathrm{PGL}(2,\mathbb{R}),\ \forall\, a\in\pi_1(S),\ \rho_2(a)=A\circ\rho_1(a)\circ A^{-1}$$

以上定义的集合称为 S 的**Teichmüller 空间**，记作 Teich(S)（该定义属于 Fricke）。Teich(S) 中的每一个元素，都指定了 $\pi_1(S)$ 中各条道路的自由同伦类中的最短闭测地线长度，因此这些元素准确来说应该是“S 上被基本群记录的双曲结构”。

泛函的观点

记 $\mathscr{S}$ 为拓扑曲面 S 上所有闭道路自由同伦类组成的集合。

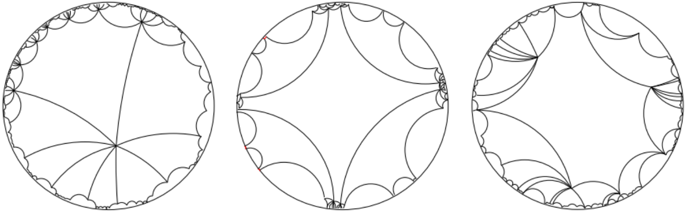
$$\{S\text{ 上的闭道路自由同伦类}\} \leftrightarrow \{\pi_1(S)\text{ 中的共轭类}\}$$

一个度量会对 $\mathscr{S}$ 中每一个闭道路自由同伦类都给出长度的指定。因此

$$\mathrm{Teich}(S) \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{满足“某些条件”的} \\ \Phi : \mathscr{S} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \end{array} \right\}$$

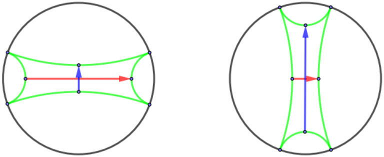
尽管 $\mathscr{S}$ 中有无限个元素，但是实际上还可以进一步证明：存在 $\mathscr{S}$ 中的有限个元素，对它们所指定的长度能完全决定 S 上被基本群记录的双曲结构（不过对这些元素的长度指定要满足一些复杂的关系）。

Teichmüller 空间中元素的例子



设 S 是亏格为 2 的定向闭曲面。几个不同的群表示 $\rho_1, \rho_2, \rho_3 : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ 对应的群作用基本区域。它们彼此不共轭，代表了 $\mathrm{Teich}(S)$ 中不同的点 $\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2, \mathscr{X}_3$。

“被基本群记录”意味着什么？



穿孔环面上的以上两种双曲结构，从形状上看是相同的，但是基本群中两个具体道路类记录的长度并不相同。在双曲结构上，它们俩相同；但是在基本群记录的双曲结构上，它们不同。

$\{S$ 上的双曲结构$\} = S$ 的模空间 $\mathcal{M}(S)$

$\{S$ 上被基本群记录的双曲结构$\} = \mathrm{Teich}(S)$

$\mathcal{M}(S) = \mathrm{Teich}(S)/\mathrm{Out}^+(\pi_1(S)) = \mathrm{Teich}(S)/\mathrm{MCG}(S)$

Teichmüller 空间的第二种定义

设 S 是 Euler 特征为负的拓扑曲面，X 是拓扑同胚于 S、带双曲度量的曲面，ϕ 是从 S 到 X 的拓扑同胚，(X, ϕ) 这个配对称为 S 上的带标记双曲结构。

在 S 上的全体带标记双曲结构上定义等价关系如下：对于 (X_1, ϕ_1) 与 (X_2, ϕ_2)，若存在等距 $I : X_1 \to X_2$ 使得 $I \circ \phi_1 : S \to X_2$ 与 $\phi_2 : S \to X_2$ 作为拓扑映射同伦，则 $(X_1, \phi_1) \sim (X_2, \phi_2)$。

S 的 **Teichmüller 空间**定义为 S 的全体带标记双曲结构在以上关系之下的等价类所组成的集合（该定义属于 Teichmüller），即

$$\mathrm{Teich}(S) = \{(X, \phi)\} / \sim$$

两种定义的对比

对于 Euler 特征为负的拓扑曲面 S，小结 Teich(S) 的两种定义

1. Fricke 的定义：离散、单的同态 $\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ 的在 $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$ 作用之下共轭类组成的集合
2. Teichmüller 的定义：带标记双曲结构 (X, ϕ) 的同伦类组成的集合

第一种定义只涉及到曲面基本群的群表现以及矩阵运算，用数据结构记录起来更加方便。第二种定义则在理论分析时更加好用。可以证明这两个定义是等价的。它们解决了前面提出的问题 1 与问题 3。

注：以上只是作为一个集合来定义了 Teich(S)，并没有定义该集合上的拓扑、坐标参数化、以及度量。